§1. Некоторые приёмы работы с вектор-функциями

Пусть  – интервал,  ‑ вектор-функция. Напомним, что в предполагается выбранным правый ортонормированный базис.

Координатное выражение вектор-функции  будет иметь вид

 или 

(рассуждения будем проводить для )

Отображение  будем называть непрерывным (соответственно гладким класса *Ck*), если координатные функции , ,  непрерывны (соответственно имеют непрерывные производные до *k*-того порядка включительно).

Если задано гладкое отображение ,

то вектор  будет иметь координаты .

*Правила работы с вектор-функциями:*

,

,

,

,

, .

**Определение 1.1.** Отображение  называется регулярным в , если . Говорят, что  – регулярно, если оно регулярно в любой точке из .

Отображение  (заметьте: нет стрелочек сверху символов) называется непрерывным (гладким класса Ck или регулярным ), если таковой является вектор-функция Соответственно и здесь все сводится к свойствам координатных функций.

***§2. Определение кривой***

*Кривая*, вообще говоря, есть термин из общеразговорного вокабуляра. Чаще всего этим термином обозначают фигуру в  , которую можно представить, как траекторию материальной точки в  или как изогнутый промежуток, помещенный в . И то и другое представление математически описывается как образ отображения вида  или, используя координатное выражение (для *n* = 3),

 .

**Обозначения:  ‑** это такое значение параметра, что ****

Определение 2.1. Будем говорить, что инъективное отображение  *взаимно непрерывно*, если любая точка  обладает следующим свойством: для любой последовательности  точек в , стремящейся к , последовательность  стремится к , т.е. .

**Определение 2.2.** Если , где  – непрерывное и взаимно непрерывное отображение, то  называют *гомеоморфным образом* интервала , а само  – *гомеоморфным отображением* (на образ) или гомеоморфизмом (на образ).

Определение 2.3. Фигура  называется *кривой*, если для любой точки  существует окрестность  в  и отображение  такое, что:

1.  гомеоморфный образ ,
2.  – гладкое регулярное отображение

При этом пару  будем называть *параметризацией* окрестности  в .

Среди всех параметризаций окрестности  в  существует параметризация , для которой . Такая параметризация называется натуральной параметризацией окрестности  точки  кривой .

*Таким образом, кривая – это фигура, как бы склеенная из деформированных без склеек и разрывов интервалов, на каждом таком интервале определена параметризация, причем параметр играет роль координаты.*

**В дальнейшем будем считать, что мы изучаем кривую в пределах параметризованной окрестности  в .**

§5. Длина дуги кривой.

Пусть  и точки из окрестности  на кривой  и  ‑ параметризация .

**Определение 5.1.** *Длиной дуги*  кривой  называется число .

Если  натуральная параметризация окрестности , то

 ‑

модуль изменения натурального параметра  при движении из точки  к точке  совпадает с длиной дуги кривой между этими точками (параметризация кривой в этом случае задает закон движения точки с единичной скоростью).

*Касательная прямая и соприкасающаяся плоскость в точке кривой.*

**Определение 6.3.** Прямую, проходящую через точку  и имеющую направляющий вектор , будем называть *касательной прямой* в точке  кривой . Вектор  будем называть единичным вектором касательной.

В дальнейшем будем считать, что  при любом 

**Определение 6.4.** Плоскость, проходящая через точку  и имеющая направляющие векторы , называется соприкасающейся плоскостью кривой  в точке .

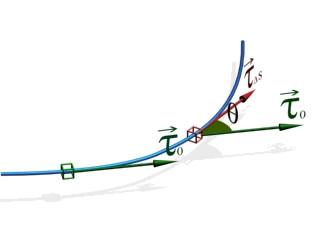
Можно доказать, что,

А) какая бы параметризация  окрестности  в  ни была выбрана, векторы  будут определять одно и то же двумерное подпространство, то есть соприкасающаяся плоскость не зависит от выбора параметризации;

Б) откладывая вторые производные различных параметризаций от точки , мы будем получать точки одной и той же (относительно касательной прямой) полуплоскости соприкасающейся плоскости. Таким образом, направление вектора , идущего перпендикулярно соприкасающейся плоскости, не зависит от выбора параметризации. Вектор  будем называть *единичным вектором бинормали.* Прямую, проходящую через точку  в направлении вектора , будем называть *бинормалью* кривой  в точке .

***§7. Кривизна кривой***

Пусть  натуральная параметризация окрестности  точки  кривой . Рассмотрим векторы ; , обозначим .

Определение 7.1. Величина  (угловую скорость поворота касательной вокруг бинормали) называется *кривизной* кривой в точке .

Можно показать (прямыми вычислениями), что .

Если параметризация не натуральный, то 

***§8. Кручение кривой***

**Определение 8.2.** Угловую скорость поворота бинормали вокруг касательнойбудем называть ***кручением***.

*Вычислительные формулы для кручения.*

**Теорема 8.1.** Пусть  ‑ произвольная точка (ориентированной) кривой . Тогда кручение  кривой  в точке  вычисляется по формуле

,

где  ‑ некоторая (какая-нибудь) натуральная параметризация некоторой окрестности  точки  на кривой .

Если параметризация  окрестности  точки  на кривой  не натуральная, то

.